[다항함수의 성질]

다항함수의 성질 (1시간 5분)

youtu.be/HN_gGcCBpiw

삼차함수의 대칭성

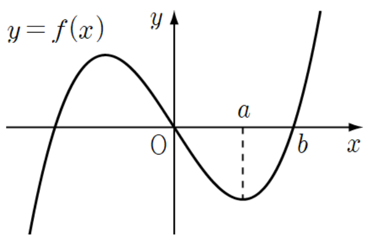
삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f''(p)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 점 $(p,\ f(p))$에 대하여 점대칭이다.

[증명1]

[문제1] 양수 a에 대하여 곡선 $y=3x^3$에 점 $(a,\ 0)$에서 그은 접선과 점 $(0,\ a)$에서 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하여라.

삼차함수의 비율 $1:\sqrt{3}$

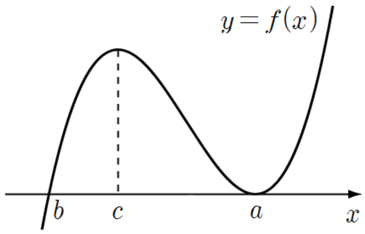
삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 원점이고 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가질 때, 두 양수 $a,\ b$에 대하여 $f'(a)=0,\ f(b)=0$이면 $a:b=1:\sqrt{3}$이다.



[증명2]

삼차함수의 비율 $1:2$

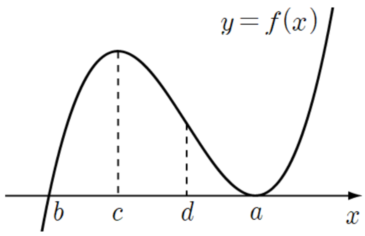
삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 x축과 $x=a$에서 접하고 $x=b(\neq a)$에서 만날 때, 곡선 $y=f(x)$가 $x=c(\neq a)$에서 극값을 가지면 $c=\dfrac{a+2b}{3}$이다.



[증명3]

삼차함수의 비율 $2:1$

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 x축과 $x=a$에서 접하고 $x=b(\neq a)$에서 만날 때, 점 $(d,\ f(d))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이면 $d=\dfrac{2a+b}{3}$이다.



[증명4]

[문제2] 곡선 $y=-x^2(x-6)$의 극대점의 x좌표를 구하여라.

삼차함수와 접선의 차함수

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=l(x)$라 하자.
a가 아닌 실수 b에 대하여 $f(b)=l(b)$이고, 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)-l(x)$라 할 때,

① $g(x)$는 $f(x)$와 최고차항의 계수가 같은 삼차함수이다.

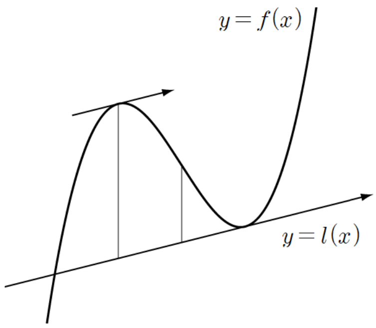
② $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=l(x)$이므로 $g(a)=g(b)=0$이다.

③ $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=l'(x)$이므로 $g'(a)=0$이다.

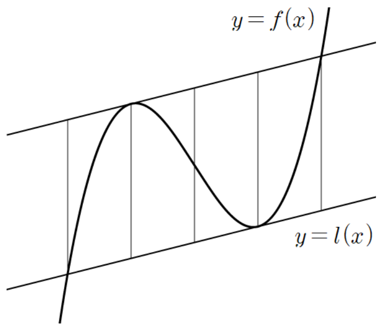
④ $l(x)$가 일차함수이므로 $f''(x)=0 \Leftrightarrow g''(x)=0$이다.
곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표와 곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 x좌표가 서로 같다.

⑤ 함수 $g(x)$에 $1:2$와 $2:1$을 때릴 수 있다. 이를 $f(x)$와 $l(x)$의 그래프에서 읽으면 [그림1]이다.

⑥ 곡선 $y=f(x)$에 $y=l(x)$가 아닌 $y=l(x)$와 평행한 접선을 그어 놓고 째려보자.
[그림2]의 $1:1:1:1$을 얻을 수 있다.



[그림1]



[그림2]

[문제3] 곡선 $y=-x^3+6x^2+ax+b$ 위의 점 $(0,\ b)$에서의 접선이
이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표를 구하여라.

삼차함수의 극댓값과 극솟값의 차이

최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 각각 가질 때,

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left|\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3\right|$$

이다.

[증명5]

[문제4] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$의 두 극점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$의 중점이 $(0,\ 1)$이고 $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}$이다. $f(x)$를 구하여라.

[문제5] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

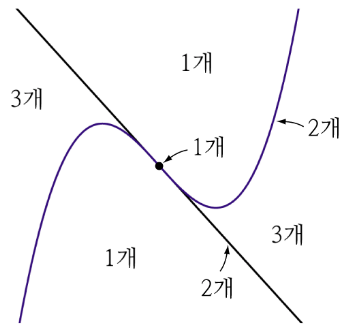
삼차함수의 그래프에 그은 접선의 개수

어떤 점 A를 지나고 삼차함수의 그래프에 접하는 직선이 몇 개 존재하는지는 점 P가 다음을 경계선으로 어느 쪽에 놓이는지에 따라 분류된다.

① 삼차함수의 그래프

② 곡선의 변곡점에서 그은 접선

오른쪽 그림 참고 변곡점에서 1개, 변곡점이 아닌 곡선 위의 점과 변곡점이 아닌 접선 위의 점에서 2개다.



[증명6]

[문제6] 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+3x^2$에 오직 한 개의 접선을 그을 수 있을 때, a의 값의 범위를 구하여라.

삼차함수의 극선의 방정식

삼차함수 $f(x)$에 대하여 다항식 $f(x)$를 $f'(x)$로 나누었을 때의 나머지를 $r(x)$라 하면 $y=r(x)$는 삼차함수의 두 극점을 지나는 직선의 방정식이다.

[증명7]

삼차함수의 서로 다른 세 실근의 합

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f''(p)=0$이고 방정식 $f(x)=0$의 세 실근이 α, β, γ일 때, $\alpha+\beta+\gamma=3p$이다.

[증명8]

[문제7] 삼차함수 $f(x)=kx(x-3)^2$에 대하여 방정식 $f(x)=f'(0)\times x$의 0이 아닌 실근을 구하여라.

거리곱(함숫값)

최고차항의 계수가 k인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 x축과 세 점 A, B, C에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{PH}}=|k|\times\overline{\mathrm{HA}}\times\overline{\mathrm{HB}}\times\overline{\mathrm{HC}}$이다.

[증명9]

거리곱(기울기)

최고차항의 계수가 k인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 x축과 세 점 A, B, C에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기의 크기는 $|k|\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$이다.

[증명10]

사차함수의 비율

① 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=f'(a)=0$, $f(b)=f'(b)=0$일 때 $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$이다.

② 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=f'(a)=f''(a)=0$, $f(b)=0$일 때, $f'\left(\dfrac{a+3b}{4}\right)=0$이다.

③ 사차함수 $f(x)=(x+a)x^2(x-a)$에 대하여, $f'(b)=0$이면 $b:a=1:\sqrt{2}$이다. (단, $a>0$, $b>0$)

[증명11]

이차함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

$$\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

※ $\left|\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|=\left|\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$에서, 이차함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는,

$$\left|\frac{(\text{최고차항의 계수})}{6}\times(x\text{축과 만나는 두 점 사이의 거리})^3\right|$$

이다.

[증명12]

[문제8] 다음을 구하여라.

(1) 두 곡선 $y=x^2$와 $y=x+6$으로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 두 곡선 $y=2x^2$와 $y=-x^2+6$으로 둘러싸인 도형의 넓이

[문제9] 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이가 곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배가 되도록 하는 상수 m에 대하여 $(m+4)^3$의 값은? (단, $m>0$)

[문제10] 포물선 $y=x^2+2x$과 직선 $y=mx+2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되도록 하는 상수 m의 값을 구하여라.

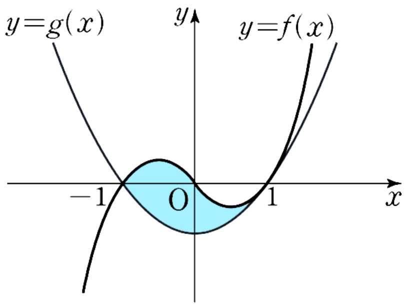
삼차함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx\right|=\left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right|$$

[증명13]

[문제11] 곡선 $y=x^3$과 이 곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

[문제12] 그림과 같이 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 만나고, 그 점에서의 접선의 기울기가 같으며 $x=-1$인 점에서 만난다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



포물선과 넓이비 $1:2$

이차함수 $y=f(x)$의 꼭짓점 O와 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$에 대하여 선분 OP를 대각선으로 하며 모든 변이 x축 또는 y축과 평행한 직사각형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$에 의하여 $2:1$로 나뉜다.

[증명14]

[문제13] 곡선 $y=\sqrt{x-2}$와 두 직선 $x=3$, $x=6$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[문제14] 두 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2-4x+12$과 두 곡선의 공통접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[문제15] 곡선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

사차함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

① $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)^3 dx = -\dfrac{a}{20}(\beta-\alpha)^5$

② $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx = \dfrac{a}{30}(\beta-\alpha)^5$

[증명15]

[문제16] 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=l(x)$와 두 점 A, B에서 접하고, 두 점 A, B의 x좌표는 각각 2, 4이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

삼차함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이2

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

※ (이차함수의 넓이 공식)×(두 절편의 평균과 남은 절편의 차이)

[증명16]

[문제17] 곡선 $y=x^3-x$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은?

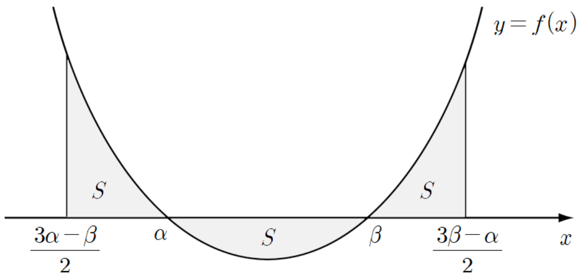
[문제18] $y=(x+a)x(x-2a)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 할 때, $\dfrac{B}{A}$의 값은? (단, $A<B$, $a>0$)

이차함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같은 넓이

이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 두 x절편이 α, $\beta(\alpha<\beta)$일 때,

$$\int_{\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\beta} f(x)dx=0, \quad \int_{\alpha}^{\beta+\frac{\beta-\alpha}{2}} f(x)dx=0$$

이다.



[증명17]

[문제19] 곡선 $y=x(6-x)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=x(6-x)$와 두 직선 $y=mx$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같게 되도록 하는 m의 값을 구하여라.

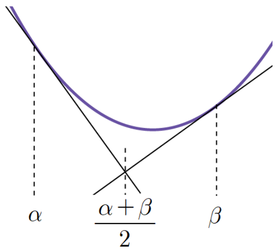
이차함수의 두 접선1

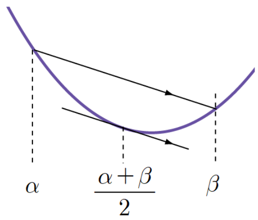
이차함수 $f(x)$에 대하여

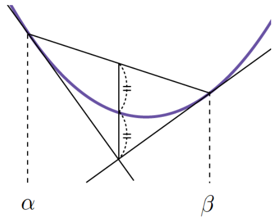
① 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선의 교점의 x좌표는 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이다.

② $f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

③ 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선의 교점을 A, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다.







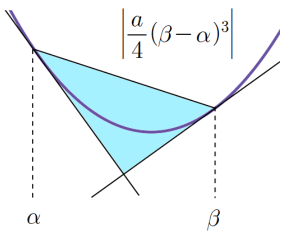
[증명18]

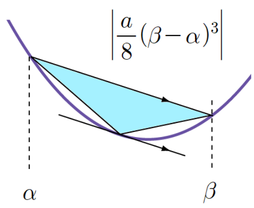
이차함수의 두 접선2

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$에 대하여

④ 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선과 직선 AB로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 $\left|\dfrac{a}{4}(\beta-\alpha)^3\right|$이다.

⑤ 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\left|\dfrac{a}{8}(\beta-\alpha)^3\right|$이다.





[증명19]

정답 및 해설

[증명1] (방법1) (삽질, 이론상 가능) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭인 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2p-x)=2q$인 것과 동치이다.

$f''(x)=6ax+2b$이므로 $p=-\dfrac{b}{3a}$, $q=f(p)$이다. $f(x)+f(2p-x)=2q$가 성립하는지 확인.

(방법2) 도함수 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$를 째려보자. 곡선 $y=f'(x)$가 직선 $x=-\dfrac{b}{3a}$에 대하여 대칭이다.

$p=-\dfrac{b}{3a}$라 하면, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(2p-x)$이다. 양 변을 각각 적분하면 $f(x)=-f(2p-x)+C$이고, $x=p$를 대입하면 $C=2f(p)$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2p-x)=2f(p)$가 성립한다.

[문제1] (풀이1) 점 $(a,\ 0)$에서 그은 접선의 접점을 $(s,\ 3s^3)$이라 하자. 접선의 방정식이 $y=9s^2x-6s^3$이고 $a=\dfrac{2}{3}s$이다. 점 $(0,\ a)$에서 그은 접선의 접점을 $(t,\ 3t^3)$이라 하자.

접선의 방정식이 $y=9t^2x-6t^3$이고 $a=-6t^3$이다. 두 접선이 서로 평행하므로 $9s^2=9t^2$에서 $t=-s$이고 a의 값에서 $s=\dfrac{1}{3}$, $t=-\dfrac{1}{3}$이다. 답은 20이다.

(풀이2) 곡선의 변곡점이 원점이다. 두 접선이 서로 평행하므로 두 접점이 서로 원점에 대하여 대칭이고, 두 접선도 서로 원점에 대하여 대칭이다. 점 $(0,\ a)$에서 그은 접선이 점 $(-a,\ 0)$도 지나므로 두 접선의 기울기가 1임을 그냥 알 수 있다. 개꿀.

[증명2] $f(x)=k(x+b)x(x-b)$라 나타낼 수 있다. 방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}b$와 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}b$이다.

(다른 방법) $f'(x)=3k(x+a)(x-a)$라 나타낼 수 있다. 적분해서 $f(x)=0$을 풀어 보자.

[증명3] $f(x)=k(x-a)^2(x-b)$라 나타낼 수 있다. $f'(x)=0$의 두 근은 a와 $\dfrac{a+2b}{3}$이다.

[증명4] [증명3]과 같은 방법으로. 한 번 더 미분하여 $f''(x)=0$의 근을 찾으면 $\dfrac{2a+b}{3}$이다.

[문제2] 6과 0을 $1:2$로 내분한 4이다. 전개해서 미분하기 싫거든.

※ 곡선의 변곡점의 x좌표는 [10]에 의해 2이다.

[문제3] (풀이1) 변곡점을 찾아서 2:1 때리면 답이 바로 나온다.

$y''=-6x+12$이므로 곡선의 변곡점의 x좌표는 2이다. 구하는 x좌표는 6이다.

(풀이2) $f(x)=-x^3+6x^2+ax+b$라 하자. 접선의 방정식은 $y=f'(0)x+f(0)$인 $y=ax+b$이다.

$f(x)=ax+b \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-6)=0$

이므로 구하는 값은 6이다. 이거 x^2이 인수로 잡히는 거 알지?

[증명5] ① 원함수의 함숫값 차이는 도함수의 넓이와 같다. $\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$이므로.

② $f(x)=ax^3+\cdots$이면 $f'(x)=3ax^2+\cdots$ 이므로 구하는 넓이는 $\left|\frac{3a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$이다.

[문제4] (풀이1) 스킬을 이용하여.

① 점 $(0,\ 1)$이 곡선의 변곡점이다. $\alpha+\beta=0$이고, 점 $(0,\ 1)$이 곡선 위의 점이므로 $f(0)=1$이다.

② 극댓값과 극솟값의 차이 $\left|\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\right|=\frac{1}{2}$에서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이다.

③ $f'(x)=3\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$이다.

④ 적분하고 상수 맞추면 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+1$이다.

※ ③, ④ 대신에 $1:\sqrt{3}$을 이용하여 $f(x)-1=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$를 바로 띄울 수 있다.

(풀이2) 스킬 없이. $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$라 하자.

① $f'(x)=3x^2+2bx+c$이고 $f'(x)=0$의 두 근 α, β가 $\alpha+\beta=0$를 만족시키므로 $3\alpha^2+c=0$, $b=0$이다.

② 두 극점의 중점의 y좌표를 째려보면 $f(\alpha)+f(\beta)=f(\alpha)+f(-\alpha)=2d=2$이므로 $d=1$이다.

③ $f(\alpha)-f(\beta)=f(\alpha)-f(-\alpha)=2\alpha^3+2c\alpha=\frac{1}{2}$이다.

④ ③의 $2\alpha^3+2c\alpha=\frac{1}{2}$과 ①의 $3\alpha^2+c=0$과 연립하면 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{3}{4}$이다.

[문제6] (풀이1) 그래프의 변곡점이 원점이고 극솟값이 -2, 극댓값이 2이다.

극댓값과 극솟값의 차이 공식 $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=4$에서 두 극점의 x좌표의 차이는 2,

두 극점의 x좌표는 각각 -1과 1이다. $1:\sqrt{3}$에 의해 $f(x)=0$의 세 실근은

$-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$이고, $f(x)=(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})$이다. $f(3)=18$이다.

(풀이2) 스킬을 완전히 봉인하고. $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$라 하자.

$f(-x)=-f(x) \quad \Leftrightarrow \quad -x^3+bx^2-cx+d=-(x^3+bx^2+cx+d)$

가 x에 대한 항등식이므로 $b=0$, $d=0$이다. $f(x)=x^3+cx$에서 $f'(x)=0$의 두 실근은

$\pm\sqrt{-\frac{c}{3}}$이다. $f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)=2$ 또는 $f\left(\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)=-2$에서 $\frac{2c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3}}=-2$이므로 $c=-3$이다.

[증명6] $f''(p)=0$이라 하고 점 $(a,\ b)$에서 그은 접점의 x좌표를 t라 하자.

접선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$가 점 $(a,\ b)$를 지나므로 $b=f'(t)(a-t)+f(t)$이다.

$g(t)=f'(t)(a-t)+f(t)-b$라 할 때, $g'(t)=f''(t)(a-t)$이다.

i) $p=a$이면 $g(x)$가 증가함수 또는 감소함수이므로 $g(t)=0$의 실근의 개수는 1이다.

ii) $p\neq a$일 때 $y=g(t)$는 $t=p$와 $t=a$에서 극값을 가지므로

$g(p)=f'(p)(a-p)+f(p)-b$와 $g(a)=f(a)-b$

의 곱의 부호에 의해 $g(t)=0$의 실근의 개수가 결정된다.

[문제6] (풀이1) 정상적인 방법으로,

① 접점의 x값을 t라 두고

② 접선이 $(0,\ a)$를 지남을 식으로 나타낸 후

③ [t값이 1개]를 푼다.

접선의 방정식은 $y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2$이다. $a=-2t^3-3t^2$이 1개의 실근을 가져야 한다.

곡선 $y=-2t^3-3t^2$을 그려보면 $t<-1$ 또는 $0<t$이다.

(풀이2) 변곡접선으로 풀어보자. 편하다.

$y''=6x+6$이므로 곡선의 변곡점은 $(-1,\ 2)$이고, 변곡점에서의 접선의 방정식은 $y=-3x-1$이다.

점 $(0,\ a)$가 변곡접선의 아래쪽 또는 곡선의 위쪽에 위치해야 하므로 $t<-1$ 또는 $0<t$이다.

[증명7] $f(x)=f'(x)q(x)+r(x)$라 하자. 함수 $r(x)$가

① 일차식, ② $r(\alpha)=f(\alpha)$, ③ $r(\beta)=f(\beta)$

를 만족시킨다. 증명 끝.

※ 시험에서 쓸 일은 거의 없지만 증명이 재미있다.

[증명8] $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 할 때, $p=-\dfrac{b}{3a}$이다.

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$이다.

[문제7] $f(x)=0$의 세 실근의 합이 $0+3+3$이므로 $f(x)=f'(0)\times x$의 세 실근의 합이 6이다.

$f(x)=f'(0)\times x$는 0을 중근으로 가지므로 구하는 근은 6이다.

[증명9] $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ f(p))$라 하자. $\mathrm{H}(p,\ 0)$이고

$f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$이므로 $f(p)=k(p-a)(p-b)(p-c)$이다.

[증명10] $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$라 하자. $f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$이고

$f'(x)=k(x-b)(x-c)+k(x-a)(x-c)+k(x-a)(x-b)$이므로 $f'(a)=k(a-b)(a-c)$이다.

[증명11] ① $f(x)=k(x-a)^2(x-b)^2$에 대하여 $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$이다.

② $f(x)=k(x-a)^3(x-b)$에 대하여 $f'\left(\dfrac{a+3b}{4}\right)=0$이다.

③ $f(x)=(x+a)x^2(x-a)$에 대하여 $f'(x)=4x\left(x-\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)$이므로 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$이다.

[증명12] $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{0}^{\beta-\alpha}ax(x-\beta+\alpha)dx$이다.

$\beta-\alpha=l$이면 $\displaystyle\int_{0}^{l}ax(x-l)dx$ 정도는 적분할 만 하다.

[문제8] (1) $\dfrac{1}{6}\times 5^3=\dfrac{125}{6}$

(2) $\dfrac{3}{6}\times(2\sqrt{2})^3=8\sqrt{2}$

[문제9] 앞 넓이는 $\dfrac{1}{6}(m+4)^3$이고 뒷 넓이는 $\dfrac{1}{6}\times 4^3$이므로

$\dfrac{1}{6}(m+4)^3=2\times\left(\dfrac{1}{6}\times 4^3\right)$이다. $(m+4)^3=128$이다.

[문제10] 넓이는 두 근의 차의 함수로 나타난다. 두 근의 차를 최소로 만들어 주면 된다.

방정식 $x^2+2x=mx+2$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\beta-\alpha|=\sqrt{(m-2)^2+8}$를 최소화. 답은 2이다.

[증명13] $\beta-\alpha=l$이라 하면 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_{0}^{l}ax^2(x-l)dx$이다.

[문제11] (풀이1) 그냥 푸는 순서는,

① 접선의 방정식은 $y=3x-2$이다.

② $x^3=3x-2$에서 다른 교점이 $(-2,\ -8)$이다.

③ 구하는 넓이는 $\displaystyle\int_{-2}^{1}\{x^3-(3x-2)\}dx$이다.

(2) 스킬을 쳐서 풀어보자. 곡선이 $x=0$에서 변곡이므로 삼차함수의 $1:1:1$을 생각하면

반대쪽 교점의 x좌표는 -2이다. [07]의 공식에 의해 넓이는 $\left|\dfrac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right|$로 $\dfrac{27}{4}$이다.

[문제12] 조건에서 $f(-1)=g(-1)$이고, $f(1)=g(1)$이고, $f'(1)=g'(1)$인데,

여기서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ 쓰면 곤란해진다.

차함수를 이용하여 $f(x)-g(x)$를 바로 띄울 수 있다. (띄울 수 있어야 한다.)

$f(x)-g(x)=(x+1)(x-1)^2$이고 구하는 넓이는 공식 쳐서 $\frac{1}{12}2^4$이다.

[증명14] 곡선 $y=ax^2$에서 O와 $\mathrm{P}(t,\ at^2)$이면 사각형의 넓이는 at^3이다.

이차함수의 그래프 아래쪽의 넓이는 $\int_0^t ax^2dx=\frac{1}{3}at^3$이다.

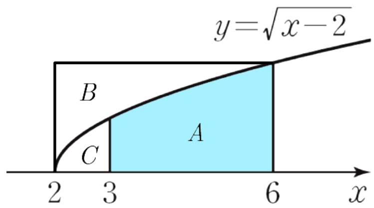
[문제13] (1) 수학2의 방법으로 풀려면 역함수를 이용하여 도형을 옮겨야 한다. 해보자.

(2) 그냥 적분하면 된다. 사실 미적분 과정이라 여기서 띄우면 완전 야매이긴 한데,

$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,dx=\int_3^6 (x-2)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_3^6$이 될 것 같은 느낌.

(3) 무리함수가 이차함수의 역함수이고 꼭짓점은 $(2,\ 0)$이므로

아래 그림에서 $A=8-B-C=8-\left(\frac{1}{3}\cdot 8\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right)$이다. 재미있다.



[문제14] (풀이1) 그냥 풀면, 각각의 접점을 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$, $\left(s,\ \frac{1}{2}s^2-4s+12\right)$라 두고.. 니네가 해봐.

한 번쯤은 풀어보자. 스킬의 소중함을 느끼는 시간이 될 것이므로..

(풀이2) 요령을 피워보자. 우선 $\frac{1}{2}x^2-4x+12=\frac{1}{2}(x-4)^2+4$에서 두 곡선은 평행이동한 관계이므로

$s=t+4$라 두면 계산 이득. 두 곡선에서 각각 공통접선을 뺀 차함수를 생각해보면, 각각

$y=\frac{1}{2}(x-t)^2$, $y=\frac{1}{2}(x-s)^2$이 된다. 두 이차함수의 그래프는 서로 대칭이므로 교점의 x좌표는

$\frac{t+s}{2}$이다. 넓이를 구하는 도형은 그 부분 2개와 같다. 각각에서공식 때려 답은 $\frac{1}{3}\cdot(4\times 2)$이다.

[문제15] 부호 귀찮으니 $a>0$, $\alpha<\beta$를 가정하자. 그래프의 꼭짓점은 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ -a\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right)$이다.

혓바닥을 내접시키는 그 사각형의 넓이가 $(\beta-\alpha)\times\left|a\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right|$이므로

구하는 값은 $\frac{2}{3}\times\left|\frac{a}{4}(\beta-\alpha)^3\right|$이다. 재미없나? 되게 재미있는 건데..

[증명15] ① $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)^3 dx = \int_{\alpha-\beta}^{0} ax^3(x+\beta-\alpha)dx$

② $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx = \int_{\alpha-\beta}^{0} ax^2(x+\beta-\alpha)^2 dx$

[문제16] 차함수 $f(x)-l(x)$를 생각해야 한다. $f(x)-l(x)=(x-2)^2(x-4)^2$이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{30}\times 2^5$이다.

[증명16] $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)dx$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)\times\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= 0-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

[문제17] 넓이 $\frac{1}{6}\times 1^3\times\frac{3}{2}$가 두 개이므로 $\frac{1}{2}$이다.

[문제18] $A=\frac{1}{6}\times a^3\times\frac{5}{2}a$이고 $B=\frac{1}{6}\times(2a)^3\times 2a$이므로 $\frac{B}{A}=\frac{32}{5}$이다.

[증명17] 삼차함수의 $2:1$ 비율에서 이 사실을 확인할 수 있다.

이차함수를 적분한 삼차함수를 생각해보자. 대충.. 아 귀찮다. 알겠지?

[문제19] 차함수 $g(x)=x(6-x)-mx$를 생각하자. $g(4)=0$이면 각이므로 $m=2$이다.

[증명18] ① $f(x)=ax^2$이라 하자. 두 접선의 방정식은 각각

$y=2a\alpha x-a\alpha^2$, $y=2a\beta x-a\beta^2$이므로 교점의 x좌표는 $\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.

(다른 증명) 함수를 $y=ax^2$이라 두고 두 접선의 방정식을 구해서 증명해보자.

각각의 접선을 뺀 두 차함수 $y=a(x-\alpha)^2$, $y=a(x-\beta)^2$을 생각하면 멋있는 증명.

② $f(x)=ax^2$이라 하자. $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a\beta^2-a\alpha^2}{\beta-\alpha}=a(\alpha+\beta)$이다.

$f'(c)=2ac$와 같을 때, $c=\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.

(다른 증명) 차함수 $a(x-\alpha)(x-\beta)$를 생각하면 한 눈에 알 수 있다.

③ $f(x)=ax^2$이라 하자. 세 점 A, B, C의 y좌표는 각각 $a\alpha\beta$, $a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$, $\frac{a\alpha^2+a\beta^2}{2}$이다.

$$\frac{a\alpha^2+a\beta^2}{2}-a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-a\alpha\beta$$

이다.

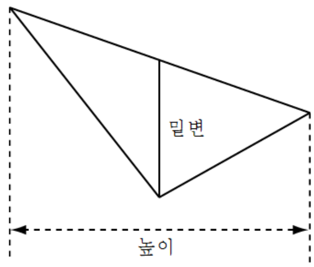
[증명19] (④의 증명1) 일감으로 떠오르는 풀이는 곡선을 $y=ax^2$으로 두고, 삼각형의 세 꼭짓점 $(\alpha,\ a\alpha^2)$, $(\beta,\ a\beta^2)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$을 구하여 신발끈 때리는 것이다.

이 풀이는 당신을 지옥으로 안내한다. 그래도 한 번 가보자.

(④의 증명2) 삼각형을 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$로 잘라서 밑변 삼으면 계산이 좀 낫다.

직선 $y=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta$ 위의 x값이 $\frac{\alpha+\beta}{2}$인 점의 y값이 $a\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$이므로

밑변의 길이는 $a\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-a\alpha\beta=a\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$이고, 높이는 $(\beta-\alpha)$이다.



(④의 증명3) 함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 또는 $y=a\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$을 째려보면 접선 하나 정도 구해서 풀 수 있다.

(④의 증명4) 두 곡선 $y=a(x-\alpha)^2$, $y=a(x-\beta)^2$를 째려보면, 삼각형 중 곡선 아래쪽 부분의 넓이를 구할 수 있다. 여기다 혓바닥 쳐주면 된다.

(⑤의 증명1) 함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 또는 $y=a\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$을 째려보면 간단하게 구할 수 있다.

(⑤의 증명2) $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3-2\times\frac{|a|}{6}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3$으로 구하면 멋 폭발.